学术论文

独立集对策的核心稳定性*

崔丽丽 方奇志** 孔 亮

中国海洋大学数学系，青岛 266071

摘要 研究独立集合作对策模型的核心稳定性. 基于线性规划对偶理论，证明了独立集对策有稳定核心的充要条件，给出了三个与核心稳定性密切相关的性质（核心的包容性、对策的精确性和可扩性）的等价条件.

关键词 对策论 独立集对策 核心稳定性 对偶定理

对策稳定集是由 Neumann 和 Morgenstern[1] 于 1944 年首先提出的，它在分析联盟的形成、竞争与权力的分配时常常优于其他解的概念，因此在经济学理论分析中具有重要的作用. 对于一个均衡的合作对策模型，其核心一定包含在每一个稳定集中；而当核心本身是一个稳定集时，它就是唯一的稳定集，此时称该对策的核心是稳定的. 由此人们提出：如何判定一个合作对策是否具有稳定的核心？然而，由于稳定集这一概念的复杂性，目前关于核心稳定性的研究较少. 这方面的研究现主要集中于一类组合优化对策模型[2]，如指派对策[3] 和最小着色对策等[4]，这类合作对策的特点是：其特征函数值是由相应的组合最优化问题所确定的. 本文讨论的独立集对策是建立在图的最大独立集问题基础上的对策模型，也属于这类组合优化对策. Deng 等引入了独立集对策[2]，并给出了其核心非空的充要条件. 本文将在此基础上研究独立集对策的核心稳定性及相关的性质.

1 定义和模型

具有特征函数的合作对策模型 $\Gamma=(N,\ \gamma)$由局中人集合 $N=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$和特征函数 γ：$2^N\to R$ 构成. 对于任意子集 $S\subseteq N$，$\gamma(S)$表示 S 作为合作整体可得到的最大收益或最小费用. 当特征函数 γ 表示收益(费用)时，称相应的对策为收益(费用)对策. 本文讨论的对策模型均为合作收益对策.

给定对策 $\Gamma=(N,\ \gamma)$，满足 $\sum_{i\in N}x_i=\gamma(N)$ 和 $x_i\geqslant\gamma(\{i\})$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$的 n 维向量 $x=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$称为该对策的一个分配；所有分配的集合记作 $X(\Gamma)$. 以下我们将用 $x(S)$表示 $\sum_{i\in S}x_i$. 对策 $\Gamma=(N,\ \gamma)$的核心 $C(\Gamma)$定义为满足子联盟合理性的分配集合，即

$$C(\Gamma)=\left\{x\in R^n:x(N)=\gamma(N)\ 且\ x(S)\geqslant\gamma(S),\ \forall S\subseteq N\right\}.$$

若对策 $\Gamma=(N,\ \gamma)$的核心非空，则称该对策是均衡的；若均衡对策 $\Gamma=(N,\ \gamma)$的每个子对策 $\Gamma_S=(S,\ \gamma_S)(S\subseteq N)$也是均衡的，则称该对策是完全均衡的.

给定无向图 $G=(V,\ E)$，其中 V，E 分别是图 G 的顶点集合和边集合. 不失一般性，本文讨论的

2006-12-21 收稿，2007-07-06 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号：10771200)

** 通信作者，E-mail：qfang@ouc.edu.cn

图均为连通简单图. 对于顶点子集 $S\subseteq V$, 若 S 中任意两点均不相邻, 则称 S 是图 G 的一个独立集. 图 G 中基数最大的独立集称为最大独立集. 对于边子集 $C\subseteq E$, 若图 G 的每个顶点均与 C 中至少一条边关联, 则称 C 是图 G 的一个边覆盖. 图 G 中基数最小的边覆盖称为最小边覆盖.

先引入以下记法: 对于 $v\in V$, $E(v)$ 表示与 v 关联的边集合; 对于 $S\subseteq E$, $V\langle S\rangle$ 表示仅与 S 中的边关联的顶点集合; 对于 $U\subseteq V$, $G[U]$ 表示 U 的导出子图. 度数为1的点称为悬挂点, 与悬挂点相关联的边称为悬挂边. 记所有悬挂点和与之相邻的顶点的集合为 V_0; 并记 E_0 为两个端点都属于 V_0 的边的集合, $\hat{E}=E\setminus E_0$.

定义1 给定无向图 $G=(V, E)$, 相应的独立集对策 $\Gamma_G=(E, \gamma)$ 定义为:

(1) 局中人集合为图 G 的边集合 E;

(2) $\forall S\subseteq E$, $\gamma(S)$ 表示导出子图 $G[V\langle S\rangle]$ 中最大独立集的基数.

一般地, 独立集对策的核心可能为空集. Deng 等讨论了独立集对策核心非空的充要条件[2], 得到了以下定理.

定理1[2] 设 $\Gamma_G=(E, \gamma)$ 是建立在图 $G=(V, E)$ 上的独立集对策, Γ_G 是均衡的当且仅当图 G 的最大独立集的基数等于其最小边覆盖的基数, 并且 $x\in C(\Gamma_G)$ 当且仅当 x 是图 G 的最小边覆盖的指标向量的凸组合.

在对策 $\Gamma=(N, \gamma)$ 中, 给定两个分配向量 x 和 y, 如果存在一个非空子联盟 S 满足 $x(S)\leqslant\gamma(S)$ 且 $x_i>y_i$ ($\forall i\in S$), 则称 x (在 S 上) 优超 y. 设 $\zeta\subseteq X(\Gamma)$, 如果 ζ 满足 a) ζ 中任何两个分配都没有优超关系; b) 对于 ζ 之外的任一分配 y, 都存在 $x\in\zeta$ 使得 x 优超 y, 则称 ζ 是对策 $\Gamma=(N, \gamma)$ 的一个稳定集. 显然, 核心 $C(\Gamma)$ 中的任何两个分配都没有优超关系, 由此得到稳定核心的定义.

定义2 给定均衡对策 $\Gamma=(N, \gamma)$, 若对任意 $y\in X(\Gamma)\setminus C(\Gamma)$, 都存在 $x\in C(\Gamma)$ 和非空子集 $S\subseteq N$ 使得 $x(S)=\gamma(S)$ 且 $x_i>y_i$ ($\forall i\in S$), 则称该对策具有稳定的核心, 或核心 $C(\Gamma)$ 是稳定的.

2 独立集对策的核心稳定性

讨论独立集对策具有稳定核心的充要条件. 给定无向图 $G=(V, E)$ 令 $\Gamma_G=(E, \gamma)$ 为定义在图 G 上的独立集对策.

引理1 若 $y\in X(\Gamma_G)$, 则对图 G 的任意悬挂边 e, 均有 $y(e)\geqslant 1$.

引理2 若 $x\in C(\Gamma_G)$, 则对任意边 $e\in E$, 均有 $0\leqslant x(e)\leqslant 1$.

证明 令 $C_1, C_2, \cdots, C_m$ 为图 G 的最小边覆盖, 并记 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}$ 为相应的指标向量. 根据定理1, 核心分配 x 可表示为 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}$ 的凸组合, 即

$$x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x^{(i)}, \text{其中 } \lambda_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,m)$$
$$\text{且} \sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1,$$

由此可知, $0\leqslant x(e)\leqslant 1$. 证毕.

引理3[2] $x\in C(\Gamma_G)$ 当且仅当 $x\geqslant 0$, $x(E)=\gamma(E)$ 且对任意 $v\in V$, 均有 $x(E(v))\geqslant 1$.

在上述引理基础上, 给出独立集对策具有稳定核心的一个等价描述.

引理4 设独立集对策 $\Gamma_G=(E, \gamma)$ 是均衡的. 则它具有稳定核心的充分必要条件是: 对任意 $y\in X(\Gamma_G)\setminus C(\Gamma_G)$, 存在顶点 $v\in V\setminus V_0$ 和 $x\in C(\Gamma_G)$, 使得 x 在 $E(v)$ 上优超 y, 即 $x(E(v))=1$ 且对任意 $e\in E(v)$, 均有 $x(e)>y(e)$.

证明 充分性由稳定核心的定义直接得到, 下证必要性.

任意给定 $y\in X(\Gamma_G)\setminus C(\Gamma_G)$, 由核心 $C(\Gamma_G)$ 的稳定性知, 存在 $x\in C(\Gamma_G)$ 和非空子集 $S\subseteq E$ 使得 $x(S)=\gamma(S)$ 且对任意 $e\in S$, 有 $x(e)>y(e)$. 又由引理1和2知, S 中必不包含悬挂边. 记导出子图 $G[V\langle S\rangle]$ 的一个最大独立集为 $\{v_1, v_2, \cdots, v_{\gamma(S)}\}$, 则 $v_1, v_2, \cdots, v_{\gamma(S)}\notin V_0$ 且 $E(v_1), \cdots, E(v_{\gamma(S)})$ 互不相交.

令 $S'=E(v_1)\cup, \cdots, \cup E(v_{\gamma(S)})$. 由 $S'\subseteq S$ 和 $x\geqslant 0$ 知, $x(S)\geqslant x(S')$. 由于 $\{v_1, v_2, \cdots, v_{\gamma(S)}\}$ 也是 $G[V\langle S'\rangle]$ 的独立集, 于是有 $x(S')\geqslant\gamma(S')\geqslant\gamma(S)=x(S)$. 故

$$x(S')=x(S)=\gamma(S).$$

因为 $x\in C(\Gamma_G)$ 且 $E(v_1), \cdots, E(v_{\gamma(S)})$ 互不相交,

则对任意 $k=1, 2, \cdots, v(S)$，均有 $x(E(v_k))=1$，又因为 $E(v_k)\subseteq S$，则对任意 $e\in E(v_k)$，均有 $x(e)>y(e)$，即 x 在 $E(v_k)$上优超 y. 证毕.

引理 5 对任意 $v^*\in V\setminus V_0$，若 $e\in E(v^*)$且属于图 G 的某个最小边覆盖，则存在图 G 的一个最小边覆盖 C，使得 $C\cap E(v^*)=\{e\}$.

证明 令 C 是图 G 的一个最小边覆盖使得 $e\in C$ 且 $|C\cap E(v^*)|$ 最小. 假设 $|C\cap E(v^*)|\geqslant 2$，则顶点 v^* 可由 $E(v^*)\setminus\{e\}$ 中的某个边覆盖. 记 $e=(v^*, u_0)$. 由 $v^*\in V\setminus V_0$ 可知，u_0 不是悬挂点，即存在 $e'\in E(u_0)\setminus\{e\}$. 若 $e'\in C$，则 $C\setminus\{e\}$ 是图 G 的一个边覆盖，与 C 是最小边覆盖矛盾；若 $e'\notin C$，则 $C\cup\{e'\}\setminus\{e\}$ 也是图 G 的一个边覆盖，与 $|C\cap E(v^*)|$ 最小矛盾. 故 $|C\cap E(v^*)|=1$，即 $C\cap E(v^*)=\{e\}$. 证毕.

定理 2 均衡的独立集对策 $\Gamma_G=(E, \gamma)$具有稳定核心当且仅当 $\hat{E}$ 中的任一边都属于一个最小边覆盖.

证明 必要性. 假设 $e_0=(v_0, u_0)\in\hat{E}$ 不属于任何最小边覆盖，且端点 v_0 不属于 V_0. 则必存在 $e_1=(v_0, u_1)\in E(v_0)\setminus\{e_0\}$ 属于图 G 的某个最小边覆盖，且这里 u_1 不是悬挂点. 由引理 5 知，存在一个最小边覆盖 C^* 使得 $C^*\cap E(v_0)=\{e_1\}$，记 C^* 的指标向量为 x^*. 取 $e_2\in E(u_1)\setminus\{e_1\}$. 利用 x^* 构造向量 y：$E\to R^+$ 如下：

$$y(e)=\begin{cases}0 & e=e_1\\ x^*(e)+1 & e=e_2\\ x^*(e) & e\neq e_1, e_2\end{cases}$$

由 y 的构造可见，任意与顶点 v_0 关联的边 e 均有 $y(e)=0$，故 $y\in X(\Gamma_G)\setminus C(\Gamma_G)$. 考查任意顶点 $v\in V\setminus V_0$：

1）当 $v=v_0$ 时，由于 e_0 不属于图 G 的任何最小边覆盖，则对任意 $x\in C(\Gamma_G)$均有 $x(e_0)=0$，即任何核心元素不能在 $E(v_0)$上优超 y；

2）当 $v\neq v_0$ 时，由于 y 是由最小边覆盖 C^* 的指标向量 x^* 构造得到的，故至少存在一边 $e\in E(v)$ 使得 $y(e)\geqslant 1$. 根据引理 2，任何核心元素也不能在 $E(v)$上优超 y.

上述分析(1)，(2)与对策 $\Gamma_G=(E, \gamma)$具有稳定的核心矛盾，必要性得证.

充分性. 令 $y\in X(\Gamma_G)\setminus C(\Gamma_G)$. 根据引理 1 和 3，必存在一个顶点 $v^*\in V\setminus V_0$，使得 $y(E(v^*))<1$. 记 $E(v^*)=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$，则由已知条件和引理 5 知，对任意 $i=1, 2, \cdots, m$，都存在一个最小边覆盖 C_i，使得 $C_i\cap E(v^*)=\{e_i\}$，这里记 C_i 的指标向量为 $x^{(i)}$. 构造向量 x 如下：

$$x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x^{(i)} \text{ 其中 } \lambda_i=y(e_i)+\frac{1-y(E(v^*))}{m},$$

容易验证 $\lambda_i\geqslant 0 (i=1, 2, \cdots, m)$且 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$. 由定理 1 知，$x\in C(\Gamma_G)$并且

$$x(E(v^*))=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x^{(i)}(E(v^*))=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1=\gamma(E(v^*));$$

$$x(e_i)=\lambda_i>y(e_i) \quad \forall e_i\in E(v^*),$$

即核心元素 x 在 $E(v^*)$上优超 y. 由引理 4 知，该对策具有核心稳定性. 证毕.

3 对策的精确性、可扩性及核心包容性

讨论三个与核心稳定性密切相关性质：精确性、可扩性及核心包容性. 我们将证明对于定义在二部图上的独立集对策，其精确性、可扩性和核心包容性是等价的.

定义 3 给定均衡对策 $\Gamma=(N, \gamma)$，其中 $|N|=n$，

（1）若对任意满足 $y(S)\geqslant\gamma(S) (\forall S\subseteq N)$的 n 维向量 y，均存在 $x\in C(\Gamma)$使得 $x\leqslant y$ 成立，则称该对策核心具有包容性；

（2）对任意 $S\subseteq N$，若对子对策 $\Gamma_S=(S, \gamma_S)$的任意核心分配 $y\in C(\Gamma_S)$，均存在 $x\in C(\Gamma)$使得 $x_i=y_i (\forall i\in S)$，则称该对策是可扩的；

（3）若对任意 $S\subseteq N$，均存在 $x\in C(\Gamma)$使得 $x(S)=\gamma(S)$，则称该对策是精确的.

将三个性质之间以及它们与核心的稳定性之间的有关结论总结在下述定理中.

定理 3[5,6] 设对策 $\Gamma=(N, \gamma)$是完全均衡的，则

1) 核心 $C(\Gamma)$的包容性隐含对策 Γ的可扩性;

2) 对策 Γ的可扩性隐含对策 Γ的精确性和核心 $C(\Gamma)$的稳定性.

定理 4 令 $\Gamma_H=(E, \gamma)$是定义在二部图 $H=(V_1, V_2; E)$上的独立集对策, 则下面的四个结论等价:

1) 对策 Γ_H 是精确的;

2) 对策 Γ_H 是可扩的;

3) 对策 Γ_H 的核心具有包容性;

4) 图 H 的任意边覆盖包含它的一个最小边覆盖.

由于二部图上的最大独立集的基数等于其最小边覆盖的基数, 根据定理 1, 独立集对策 $\Gamma_H=(E, \gamma)$是完全均衡的. 又由定理 3 知, 3)→2)→1)成立, 故只需证明 1)→4)和 4)→3).

定理 4 中 1)→4)证明: 令 C^*是图 H 的任一边覆盖, 记 $\overline{C}^*=E\setminus C^*$, 由 Γ_H 的精确性知, 存在 $x^*\in C(\Gamma_H)$使得 $x^*(\overline{C}^*)=\gamma(\overline{C}^*)=0$. 于是有 $x^*(C^*)=x^*(E)-x^*(\overline{C}^*)=\gamma(E)-x^*(\overline{C}^*)=\gamma(E)$.

令 $\Phi=\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$为图 H 的所有最小边覆盖的集合, 并记 $x^{(i)}$为最小边覆盖 C_i 的指标向量($i=1, 2, \cdots, m$). 显然 $|C_1|=|C_2|=\cdots=|C_m|=\gamma(E)$. 根据定理 1, 存在 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m\geqslant 0$满足 $\sum_{i=1}^m\lambda_i=1$, 使得上述 x^*可表示为 $x^*=\sum_{i=1}^m\lambda_i x^{(i)}$, 由此可得

$$\gamma(E)=x^*(C^*)=\sum_{i=1}^m\lambda_i x^{(i)}(C^*)=\sum_{i=1}^m\lambda_i|C^*\cap C_i|\leqslant\sum_{i=1}^m\lambda_i|C_i|=|C_i|=\gamma(E).$$

因此上式中的不等式均取等号, 即每个对应于$\lambda_i>0$的最小边覆盖 C_i, 均有 $C^*\cap C_i=C_i$. 故 C^*至少包含图 H 的一个最小边覆盖. 证毕.

为了证明定理 4 的结论 4)→3), 我们需要 Gellekom 等在文献[7] 中给出的具有核心包容性对策的一个刻画. 给定收益对策 $\Gamma=(N, \gamma)$, 定义

$$L(\Gamma)=\left\{y\in\mathrm{R}^{|N|}: y(S)\geqslant\gamma(S), \forall S\subseteq \mathrm{N}\right\}$$

引理 6[7] 给定均衡对策 $\Gamma=(N, \gamma)$, 则它具有包容性核心的充分必要条件是对于多面体 $L(\Gamma)$的任意极点, 均有 $y(N)\leqslant\gamma(N)$.

对于定义在二部图 $H=(V_1, V_2; E)$上的独立集对策 $\Gamma_H=(E, \gamma)$, 先给出 $L(\Gamma_H)$的一个等价描述, 并在此基础上讨论其极点的性质. 记$n=|E|$, 定义

$$L'(\Gamma_H)=\left\{y\in\mathrm{R}^n: y(E(v))\geqslant 1, \forall v\in V; y(e)\geqslant 0, \forall e\in E\right\}$$

引理 7 设 $\Gamma_H=(E, \gamma)$是定义在二部图 $H=(V_1, V_2; E)$上的独立集对策, 则

1) $L(\Gamma_H)=L'(\Gamma_H)$

2) $L'(\Gamma_H)$的极点是图 H 的极小边覆盖的指标向量.

证明 1) 易见 $L(\Gamma_H)\subseteq L'(\Gamma_H)$. 再证 $L(\Gamma_H)\supseteq L'(\Gamma_H)$. 令 $y\in L'(\Gamma_H)$, 且 $S\subseteq E$ 为任意边子集. 若导出子图 $G[V\langle S\rangle]$ 为空图, 则$\gamma(S)=0$, 显然有 $y(S)\geqslant\gamma(S)$. 若导出子图$G[V\langle S\rangle]$ 不为空图, 则 $\gamma(S)>0$ 并令 $I_S=\{v_1, v_2, \cdots, v_{\gamma(S)}\}$为 $G[V\langle S\rangle]$ 的一个最大独立集. 由 $L'(\Gamma_H)$的定义知

$$y(S)\geqslant\sum_{i=1}^{\gamma(S)}y(E(v_i))\geqslant\sum_{i=1}^{\gamma(S)}1=\gamma(S),$$

即 $y\in L(\Gamma_H)$. 故 $L(\Gamma_H)=L'(\Gamma_H)$.

2) 假设 y^*是多面体 $L'(\Gamma_H)$的一个极点. 根据线性规划理论, 必存在一个 n 维非负向量 ω, 使得 y^*是下述线性规划

$$\mathrm{LP:}\quad \min\left\{\omega^t y: y(E(v))\geqslant 1, \forall v\in V; y(e)\geqslant 0, \forall e\in E\right\}$$

的唯一最优解. 因为图 H 是二部图, 线性规划(LP)的系数矩阵是全单模矩阵[8], 因此该线性规划有整数最优解, 即 y^*是$\{0, 1\}$向量. 又由线性规划(LP)的约束条件可知, y^*是图 H 的某个边覆盖 C 的指标向量.

假设 C不是一个极小边覆盖, 则 C 的某个真子集 C'仍是 H 的边覆盖, 由此可知 C'的指标向量也是(LP)的最优解, 这与 y^*的唯一性矛盾. 故 C 是图 H 的极小边覆盖. 证毕.

定理 4 中 4)→3)的证明: 给定 $L(\Gamma_H)$的任一极点 y, 由引理 7 知, y 是图 H 的某个极小边覆盖 C

的指标向量. 又由条件 4)知, C 包含 H 的某个最小边覆盖, 故 C 本身就是一个最小边覆盖. 于是 $y(E)=|C|=\gamma(E)$. 根据引理 6, 对策 Γ_H 具有核心包容性. 证毕.

参 考 文 献

1 von Neumann J, Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton: Princeton University Press, 1944
2 Deng X, Ibaraki T, Nagamochi H. Algorithmic aspects of the core of combinatorial optimization games. Mathematics of Operations Research, 1999, 24: 751—766
3 Solymosi T, Raghavan TES. Assignment games with stable cores. International Journal of Game Theory, 2001, 30: 177—185
4 Bitenhader T, Okamoto Y. Core stability of minimum coloring games. Mathematics of Operations Research, 2006, 31: 418—431
5 Biswas AK, Parthasarathy T, Potters JAM, et al. Large cores and exactness. Game and Economic Beheavior, 1999, 28: 1—12
6 Sharkey WW. Cooperative games with large cores. International Journal of Game Theory, 1982, 11: 175—182
7 van Gellekom JRG, Potters JAM, Reijnierse JH. Prosperity properties of TU-games. International Journal of Game Theory, 1999, 28: 211—227
8 Schrijver A. Theory of Linear and Integer Programming. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1986